Sur un Problème relatif à la déformation des surfaces.

PAR E. GOURSAT.

1. Dans son Mémoire sur la déformation des surfaces,* Bour a montré qu'on pouvait toujours, étant donnée une surface de révolution quelconque, trouver une infinité d'autres surfaces de révolution applicables sur la première, de telle façon que les méridiens et les parallèles se correspondent. Une propriété analogue appartient encore aux surfaces moulures et à une classe plus générale de surfaces que nous allons définir. Nous nous proposons pour cela le problème général suivant :†

Peut-on déformer une surface de telle façon qu'une série de sections planes, dont les plans sont parallèles, se change en une série de sections planes dont les plans sont parallèles?

Soit $z = f(x, y)$ l'équation d'une surface S. Toute surface S' applicable sur la première peut être définie en regardant les coordonnées X, Y, Z d'un point de S' comme des fonctions de x, y, assujetties à vérifier la relation

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 = (1 + p^2)\,dx^2 + 2pq\,dx\,dy + (1 + q^2)\,dy^2, \tag{1}$$

où

$$p = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Chacune des fonctions X, Y, Z doit vérifier l'équation aux dérivées partielles du second ordre‡

$$(s^2 - rt)(P^2 + Q^2 - 1) + (S^2 - RT)(1 + p^2 + q^2) + (rT + tR + 2sS)(P^p + Q^q) = 0, \tag{2}$$

---

* Journal de l'Ecole Polytechnique, 39ème Cahier.

† Depuis que ces lignes sont écrites, j'ai eu connaissance d'un travail de Mr. B. Mlodzieiowski, publié dans le Bulletin des Sciences Mathématiques (Avril 1891), où l'auteur signale en passant les surfaces étudiées ici. Mais il ne s'est pas posé la question à un point de vue général et n'a pas indiqué le mode de génération de ces surfaces. E. G.

‡ Darboux : Leçons sur la théorie générale des surfaces, t. III, p. 262.

P, Q, R, S, T désignant les dérivées premières et secondes de la fonction inconnue. On ne restreint évidemment pas la généralité du problème en supposant que ce sont les sections planes parallèles au plan des yz qui se correspondent dans les deux surfaces, de façon que X se réduise à une fonction de x seulement·

$$X = \phi(x).$$

L'équation (2) devra admettre pour intégrale une fonction de x seulement. Pour cette intégrale on aura $Q = 0$, $S = 0$, $T = 0$, et l'équation (2) se réduit à

$$(s^2 - rt)(P^2 - 1) + tpRP = 0.$$

On a toujours la solution évidente $P^2 = 1$, ou

$$X = \pm x + \varkappa$$

qui ne fournit que des surfaces S' égales à S ou à sa symétrique. Pour qu'il existe d'autres solutions que celle-là, il faut et il suffit que

$$\frac{s^2 - rt}{tp}$$

soit une fonction de x seulement

$$s^2 - rt = tp\, F(x), \tag{3}$$

et le problème se ramène à l'intégration de l'équation (3). Nous voyons déjà que les solutions connues ne peuvent être les plus générales, puisque l'équation (3) contient une fonction arbitraire $F(x)$, et l'intégration en introduira deux autres. On voit en outre que, si la surface S satisfait à l'équation (3), il existera une infinité de surfaces S' répondant à la question et dépendant d'une constante arbitraire, car on aura pour déterminer $X = \phi(x)$ une équation différentielle du second ordre

$$F(x)\{\phi'^2 - 1\} + \phi'\phi'' = 0,$$

dont l'intégrale générale est

$$\phi = \int \sqrt{1 + Ce^{-2\int F(x)\,dx}}\,dx + C'.$$

On peut toujours supposer $C' = 0$, car cela revient à transporter la surface parallèlement à elle-même.

2. L'équation (3) s'intègre facilement par la méthode de Monge et d'Ampère. On aura pour les équations différentielles des caractéristiques*

$$dpdx + dqdy + p\, F(x)\, dx^2 \quad = 0,$$
$$dpdq + p\, F(x)\, dqdx = 0\,;$$

* Darboux : t. III, p. 264.

on en déduit aussitôt les deux combinaisons intégrables

$$dq = 0, \quad dp + p\,F(x)\,dx = 0.$$

Comme $F(x)$ est une fonction arbitraire de x, on peut toujours poser

$$F(x) = \frac{\psi'(x)}{\psi(x)},$$

$\psi(x)$ désignant encore une fonction arbitraire. On obtient alors pour l'équation (3) l'intégrale intermédiaire

$$p\psi(x) = \phi(q), \tag{4}$$

$\phi(q)$ étant une fonction arbitraire. Pour intégrer cette équation par la méthode de Lagrange et Charpit, je pose $q = a$, a étant une constante arbitraire; on aura ensuite

$$p = \frac{\phi(a)}{\psi(x)},$$

$$dz = \frac{\phi(a)}{\psi(x)}\,dx + a\,dy,$$

ce qui fournit l'intégrale complète

$$z = \phi(a) f(x) + ay + b, \tag{5}$$

où

$$f(x) = \int \frac{dx}{\psi(x)}.$$

La méthode de la variation des constantes donnera ensuite l'intégrale générale et, en changeant un peu les notations, on a les formules définitives

$$\left.\begin{aligned} y &= f(x)\,\phi'(a) + \psi'(a), \\ z &= f(x)[\phi(a) - a\phi'(a)] + \psi(a) - a\psi'(a), \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

qui donnent l'intégrale générale de l'équation

$$(s^2 - rt) f'(x) + ptf''(x) = 0. \tag{3}^{\text{bis}}$$

3. Les surfaces réprésentées par les équations (6) dépendent des trois fonctions arbitraires f, ϕ, ψ. Ces surfaces sont susceptibles d'une définition géométrique analogue à celle des surfaces moulures. Remarquons d'abord que les courbes $x = C^t$, $a = C^t$ forment sur la surface un réseau conjugué. On a, en effet, en regardant x et a comme les deux variables indépendantes,

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial x}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = f'(x)\,\phi'(a), \quad \frac{\partial z}{\partial x} = f'(x)[\phi(a) - a\phi'(a)], \\ &\frac{\partial x}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial a} = f(x)\phi''(a) + \psi''(a), \quad \frac{\partial z}{\partial a} = -a[f(x)\,\phi''(a) + \psi''(a)], \\ &\frac{\partial^2 x}{\partial a \partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial a \partial x} = f'(x)\,\phi''(a), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial a \partial x} = -af'(x)\,\phi''(a), \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

et, par suite,

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial x} & 1 \\ \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial a} & 0 \\ \frac{\partial^2 y}{\partial a \partial x} & \frac{\partial^2 z}{\partial a \partial x} & 0 \end{vmatrix} = 0 .$$

Les courbes $x = C^t$ sont les sections de la surface par des plans parallèles au plan des yz; par conséquent, les courbes $a = C^t$ sont les courbes de contact des cylindres circonscrits ayant leurs génératrices parallèles au plan des yz. Or ces courbes $a = C^t$ sont des courbes planes dont le plan est parallèle à l'axe des x, comme on le voit immédiatement d'après les équations (6). Il suit de là que, si on considère les sections de la surface par des plans parallèles au plan des yz, les tangentes à ces différentes sections aux points où elles sont rencontrées par une même courbe $a = C^t$ sont parallèles. Si on projette toutes ces sections planes sur le plan des yz, on aura un réseau de courbes planes jouissant de la propriété suivante: les points de ces courbes où les tangentes sont parallèles sont toujours sur une même ligne droite. On en déduit la construction suivante de la surface:

Prenons dans le plan des yz deux courbes *quelconques* C, C' et faisons correspondre les points M, M' des deux courbes où les tangentes sont parallèles. Joignons M et M' et prenons le point m qui divise le segment MM' dans un rapport donné κ. Lorsque les points M, M' décrivent les courbes C, C', le point m décrit une certaine courbe C_κ, et, en faisant varier le rapport κ, on forme un réseau de courbes planes. Déplaçons chacune de ces courbes d'une quantité arbitraire parallèlement à Ox; la surface ainsi engendrée est la surface la plus générale répondant à la question. Les deux courbes C, C' et la loi du déplacement donnent bien trois fonctions arbitraires. Parmi les cas particuliers remarquables, on peut citer les suivants:

1°. Si les courbes C, C' sont des circonférences concentriques, la surface obtenue est une surface de révolution. Plus généralement, si les courbes C et C' sont deux courbes *parallèles* quelconques, la construction précédente donne une surface moulure. On aura dans ce cas

$$\phi(a) = \sqrt{a^2 + 1},$$

et, de plus, $\psi(a) = 0$, si la surface est de révolution.

2°. Prenons pour C et C' deux courbes égales, C' se déduisant de C par une simple translation. Alors toutes les courbes C_κ seront égales à C et la surface sera engendrée par un mouvement de translation de la courbe C, chacun des points de cette courbe décrivant une courbe plane dont le plan est parallèle à l'axe des x. Si on suppose en outre que ce plan est parallèle au plan des xz, $\phi(a)$ se réduira à une constante, et la surface aura une équation de la forme

$$z = F(x) + F_1(y);$$

on voit qu'elle admet un double mode de génération par un profil animé d'un mouvement de translation.

3°. Supposons que les courbes C et C' soient homothétiques; les courbes C_κ seront également homothétiques aux deux premières. Si en particulier C et C' sont des ellipses homothétiques et concentriques, la construction donnera, en choisissant convenablement la loi de déplacement, les surfaces du second degré. Il faudra prendre ici $\psi(a) = 0$.

4°. Si $f(x) = Ax + B$, la surface (6) est une surface développable, ce dont il est aisé de se rendre compte par quelques considérations géométriques.

4. Les fonctions f, ϕ, ψ étant connues, proposons-nous maintenant de trouver toutes les surfaces S' applicables sur la surface S, de telle façon que les sections planes parallèles au plan des yz se correspondent. Il est clair que ces nouvelles surfaces seront de même nature que la première. Pour simplifier les formules, nous écrirons les formules (6), en changeant un peu les notations,

$$\left.\begin{aligned} y &= f(x)\,\theta_1(a) + \eta_1(a), \\ z &= f(x)\,\theta(a) + \eta(a), \end{aligned}\right\} \qquad (7)^{\text{bis}}$$

les fonctions θ, θ_1, η, η_1 satisfaisant à la relation

$$\frac{\eta_1'(a)}{\eta'(a)} = \frac{\theta_1'(a)}{\theta'(a)} = \lambda. \qquad (8)$$

On en tire:

$$dy = f'(x)\,\theta_1(a)\,dx + [f(x)\,\theta_1'(a) + \eta_1'(a)]\,da,$$
$$dz = f'(x)\,\theta(a)\,dx + [f(x)\,\theta'(a) + \eta'(a)]\,da,$$

$$\left.\begin{aligned} ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 &= dx^2 + f'^2(x)[\theta^2(a) + \theta_1^2(a)]\,dx^2, \\ &+ 2f'(x)[f(x)\{\theta_1(a)\,\theta_1'(a) + \theta(a)\,\theta'(a)\} + \theta_1(a)\,\eta_1'(a) + \theta(a)\,\eta'(a)]\,da\,dx \\ &+ [f^2(x)\{\theta'^2(a) + \theta_1'^2(a)\} + 2f(x)\{\theta'(a)\,\eta'(a) + \theta_1'(a)\,\eta_1'(a)\} \\ &\qquad + \eta'^2(a) + \eta_1'^2(a)]\,da^2. \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Soient X, Y, Z les coordonnées d'un point de la nouvelle surface, que nous

supposerons exprimées en fonction de x et de a; X étant supposée fonction de x seulement, on aura, nous l'avons vu,

$$\frac{X'X''}{X'^2-1}=\frac{rt-s^2}{tp}=\frac{f''(x)}{f'(x)},$$

et on en déduit, en négligeant une constante additive,

$$X=\int\sqrt{1+nf'^2(x)}\,dx, \tag{10}$$

n désignant un paramètre arbitraire. Nous prendrons pour Y et Z des expressions de la forme suivante

$$\left.\begin{aligned} Y&=f(x)\Theta_1(a)+\mathrm{H}_1(a),\\ Z&=f(x)\Theta(a)+\mathrm{H}(a),\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

$\Theta(a)$, $\Theta_1(a)$, $\mathrm{H}(a)$, $\mathrm{H}_1(a)$ étant des fonctions à déterminer. Des formules (10) et (11) on déduit, pour le carré de l'élément linéaire de la nouvelle surface,

$$\left.\begin{aligned} dS^2 = dx^2 &+ f'^2(x)[\Theta^2(a)+\Theta_1^2(a)+n]\,dx^2 \\ &+2f'(x)[f(x)\{\Theta_1(a)\Theta_1'(a)+\Theta(a)\Theta'(a)\} \\ &\qquad\qquad +\Theta_1(a)\mathrm{H}_1'(a)+\Theta(a)\mathrm{H}'(a)]\,da\,dx \\ &+[f'^2(x)\{\Theta'^2(a)+\Theta_1'^2(a)\}+2f(x)\{\Theta'(a)\mathrm{H}'(a)+\Theta_1'(a)\mathrm{H}_1'(a)\} \\ &\qquad\qquad +\mathrm{H}'^2(a)+\mathrm{H}_1'^2(a)]\,da^2.\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

En identifiant les formules (9) et (12), on obtient les relations ci-dessous:

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{A}) \quad \Theta^2(a)+\Theta_1^2(a)=\theta^2(a)+\theta_1^2(a)-n,\\
&(\mathrm{B}) \quad \Theta(a)\Theta'(a)+\Theta_1(a)\Theta_1'(a)=\theta(a)\theta'(a)+\theta_1(a)\theta_1'(a),\\
&(\mathrm{C}) \quad \Theta(a)\mathrm{H}'(a)+\Theta_1(a)\mathrm{H}_1'(a)=\theta(a)\eta'(a)+\theta_1(a)\eta_1'(a),\\
&(\mathrm{D}) \quad \Theta'^2(a)+\Theta_1'^2(a)=\theta'^2(a)+\theta_1'^2(a),\\
&(\mathrm{E}) \quad \Theta'(a)\mathrm{H}'(a)+\Theta_1'(a)\mathrm{H}_1'(a)=\theta'(a)\eta'(a)+\theta_1'(a)\eta_1'(a),\\
&(\mathrm{F}) \quad \mathrm{H}'^2(a)+\mathrm{H}_1'^2(a)=\eta'^2(a)+\eta_1'^2(a).
\end{aligned}$$

La relation (B) est une conséquence de la relation (A); les deux équations (A) et (D) déterminent $\Theta(a)$ et $\Theta_1(a)$ par une quadrature. On en déduit, en effet,

$$\begin{aligned}(\Theta^2(a)&+\Theta_1^2(a))(\Theta'^2(a)+\Theta_1'^2(a))\\ &=(\Theta(a)\Theta'(a)+\Theta_1(a)\Theta_1'(a))^2+\{\Theta(a)\Theta_1'(a)-\Theta_1(a)\Theta'(a)\}^2,\end{aligned}$$

c. à d.

$$\begin{aligned}\{\theta^2(a)&+\theta_1^2(a)-n\}\{\theta'^2(a)+\theta_1'^2(a)\}\\ &=\{\theta(a)\theta'(a)+\theta_1(a)\theta_1'(a)\}^2+\{\Theta(a)\Theta_1'(a)-\Theta_1(a)\Theta'(a)\}^2,\end{aligned}$$

et par suite

$$\frac{\Theta(a)\,\Theta_1'(a)-\Theta_1(a)\,\Theta'(a)}{\Theta^2(a)+\Theta_1^2(a)}=\frac{d}{da}\operatorname{arc\,tg}\frac{\Theta_1(a)}{\Theta(a)}$$

$$=\frac{\sqrt{\{\theta^2+\theta_1^2-n\}\{\theta'^2+\theta_1'^2\}-\{\theta\theta'+\theta_1\theta_1'\}^2}}{\theta^2+\theta_1^2-n}.$$

Une fois $\Theta(a)$ et $\Theta_1(a)$ obtenus, on aura 3 équations (C), (E), (F) pour calculer $\mathrm{H}'(a)$, $\mathrm{H}_1'(a)$. Les équations (C) et (E) étant du premier degré, on en tire

$$\mathrm{H}'=\frac{\Theta_1'\{\theta\eta'+\theta_1\eta_1'\}-\Theta_1\{\theta'\eta'+\theta_1'\eta_1'\}}{\Theta\Theta_1'-\Theta_1\Theta'},$$

$$\mathrm{H}_1'=\frac{\Theta\{\theta'\eta'+\theta_1'\eta_1'\}-\Theta'\{\theta\eta'+\theta_1\eta_1'\}}{\Theta\Theta_1'-\Theta_1\Theta'}.$$

En tenant compte des relations (8), (A), (B), (D), on vérifie sans peine que ces valeurs de H', H_1' vérifient la dernière équation (F).

5. Les formules précédentes renferment, comme cas particuliers, les formules de Bour. Si on suppose $\phi(a)=1$, on est conduit au résultat suivant, dont la immédiate: toutes les surfaces représentées par les formules

$$\left.\begin{aligned}X&=\int\sqrt{1+(1-n^2)F'^2(x)}\,dx,\\ Y&=\int\sqrt{1+\left(1-\frac{1}{n^2}\right)F_1'^2(y)}\,dy,\\ Z&=nF(x)+\frac{F_1(y)}{n}\end{aligned}\right\}$$

sont applicables sur la surface qui a pour équation

$$z=F(x)+F_1(y).$$

Si on suppose $\eta=\eta_1=0$, on aura aussi $\mathrm{H}'=\mathrm{H}_1'=0$, et on n'a plus que deux quadratures à effectuer, l'une pour avoir X, l'autre pour avoir $\operatorname{arc\,tg}\frac{\Theta_1}{\Theta}$. Remarquons que ces deux quadratures sont absolument indépendantes l'une de l'autre.

Prenons par exemple l'ellipsoïde

$$\left.\begin{aligned}y&=\sqrt{1-\frac{x^2}{A^2}}\,B\cos t,\\ z&=\sqrt{1-\frac{x^2}{A^2}}\,C\sin t,\end{aligned}\right\}$$

où A, B, C sont les trois demi-axes, x et t les paramètres variables. Posons $\Theta^2(t) + \Theta_1^2(t) = B^2 \cos^2 t + C^2 \sin^2 t - n$; on aura ensuite,

$$\frac{d}{dt} \operatorname{arc\,tg} \frac{\Theta_1(t)}{\Theta(t)} = \frac{\sqrt{\{(B^2-n)\cos^2 t + (C^2-n)\sin^2 t\}\{B^2 \sin^2 t + C^2 \cos^2 t\} - (B^2-C^2)^2 \sin^2 t \cos^2 t}}{(B^2-n)\cos^2 t + (C^2-n)\sin^2 t}$$

toutes les surfaces représentées par le système des 3 équations

$$\left.\begin{aligned} X &= \int \sqrt{1 + \frac{nx^2}{A^4\left(1 - \frac{x^2}{A^2}\right)}}\, dx, \\ Y &= \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}\, \Theta(t), \\ Z &= \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}\, \Theta_2(t) \end{aligned}\right\}$$

sont applicables sur l'ellipsoïde. Si on pose $\operatorname{tg} t = u$, il vient:

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{\Theta_1}{\Theta} = \int \frac{\sqrt{\{B^2 - n + (C^2-n)u^2\}\{B^2u^2 + C^2\} - (B^2 - C^2)^2 u^2}}{B^2 - n + (C^2 - n)u^2} \times \frac{du}{1+u^2};$$

on est ramené à deux intégrales elliptiques de modules différents.

On trouverait de même des surfaces applicables sur le paraboloïde quelconque, mais les résultats obtenus plus haut fournissent une solution encore plus simple. Ainsi les surfaces représentées par les trois équations

$$\left.\begin{aligned} X &= \int \sqrt{1 + (1-n^2)\frac{x^2}{a^2}}\, dx, \\ Y &= \int \sqrt{1 + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\frac{y^2}{b^2}}\, dy, \\ Z &= \frac{nx^2}{2a} + \frac{y^2}{2bn} \end{aligned}\right\}$$

sont toutes applicables sur le paraboloïde

$$z = \frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b}.$$

PARIS, *Mai* 1891.